UNIVERSIDAD DE LIMA
PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: Cálculo I   Fecha: 29 de febrero de 2016
CICLO: 2016-0
TIEMPO: 90 minutos

EXAMEN FINAL

CÓDIGO	APELLIDOS Y NOMBRES	SECCIÓN

INDICACIONES:

- El procedimiento, el orden, la claridad de las respuestas y el uso apropiado de la notación matemática serán considerados como criterios de calificación.
- Escriba con lapicero de tinta azul o negra. La prueba desarrollada con lápiz no será calificada.
- La prueba consta de **4** preguntas, cuyo puntaje está indicado en cada una de ellas.
- Se permite el uso de una calculadora científica no programable.

Con la finalidad de evitar la anulación de la prueba tenga en cuenta que no se permite:

- Utilizar material de consulta (apuntes de clase, fotocopias o materiales similares).
- Usar teléfonos celulares, así como cualquier otro medio o dispositivo electrónico de comunicación.
- Conversar durante el desarrollo de la prueba.
- Desglosar o arrancar alguna hoja del cuadernillo de respuestas.

---

1. a) (2 ptos.) Dada la función

$$f(x) = ln(x^2 + a^2) - 2\ln x + arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

Calcule los valores de la constante a si la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ es igual a $-1/6$.

b) (2 ptos.) Halle la ecuación de la recta normal a la curva

$$\text{C: } ln\left(\frac{e^y}{x^2}\right) + 2sen\left(\frac{y}{x}\right) - 2arctan(x + y) + \frac{\pi}{2} = 0$$

en el punto $T(1; 0)$.

2. Sea f la función dada por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

a) (1 pto.) Halle su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas, en caso de que existan.

b) (2 ptos.) Determine los intervalos de crecimiento, los intervalos de decrecimiento y los valores extremos relativos.

c) (1 pto.) Con la información obtenida, esboce la gráfica de f en el plano cartesiano.

3. (3 ptos.) Un fabricante quiere diseñar una caja rectangular con una base cuyo largo sea igual al doble del ancho y que la suma de sus tres dimensiones sea 54 cm.¿Qué dimensiones debe tener la caja para que su volumen sea máximo?

4. En cada caso, utilice un método de integración apropiado y halle cada una de las siguientes integrales indefinidas.

a) (3 ptos.) $\int x^3 sen(x^2)\ dx$

b) (3 ptos.) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

c) (3 ptos.) $\int \frac{x^2+9}{(x+1)(x^2+4)} dx$

TABLA DE INTEGRALES

1. $\int \sec u\ du = \ln|\sec u + \tan u| + k$.

2. $\int \csc u\ du = \ln|\csc u - \cot u| + k.$

3. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + k\ ,\ u \neq a.$

4. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + k.$

5. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + k\ ,\ |u| < a.$

6. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\ \text{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + k\ ,\ |u| > a.$

7. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + k.$

8. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\ du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2 \pm a^2}\ \pm a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right] + k.$

Los profesores de la asignatura.

UNA SOLUCIÓN DEL EXAMEN FINAL

1. $a)$ $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+a^2} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$

$f'(3) = \dfrac{6}{9+a^2} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{a}{9+a^2} = -\dfrac{1}{6} \iff a^2 - 2a - 3 = 0 \iff (a+1)(a-3) = 0$

Luego, $a = -1 \ \vee \ a = 3$.

$b)$ $C: y - 2\ln x + 2sen\left(\dfrac{y}{x}\right) - 2arctan(x+y) + \dfrac{\pi}{2} = 0$

Al derivar en forma implícita con respecto a x, se tiene

$y' - \dfrac{2}{x} + 2cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\left(\dfrac{xy'-y}{x^2}\right) - \dfrac{2(1+y')}{1+(x+y)^2} = 0$

Al evaluar en el punto $T(1;0)$, resulta

$y' - 2 + 2y' - (1+y') = 0 \iff y' = \dfrac{3}{2} = m_T$

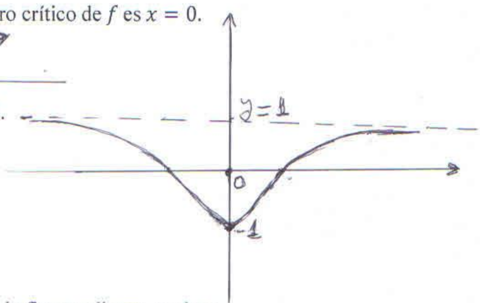
$L_N: y - 0 = -\dfrac{2}{3}(x-1)$.

2. $a)$ $Dom(f) = \mathbb{R}$, $\quad y = 1 \ es\ A.H.$, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \ y \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

$b)$ $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \implies$ Número crítico de f es $x = 0$.

Signo de $f'(x)$: $-$ 0 $+$

Valor mínimo relativo: $f(0) = -1$.



3. De acuerdo a los datos del problema y la figura adjunta, se tiene

$3x + h = 54 \implies h = 54 - 3x$

$V(x) = 2x^2h = 2x^2(54-3x)$

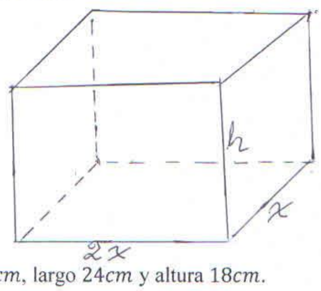
$\quad = 108x^2 - 6x^3, \quad 0 < x < 18$

$V'(x) = 216x - 18x^2 = 18x(12-x) = 0$

Número crítico de interés: $x = 12$.

Signo de $V'(x)$: $+$ 12 $-$

Luego, $x = 12$ corresponde a un máximo relativo.



Por lo tanto, las dimensiones de la caja son: ancho $12cm$, largo $24cm$ y altura $18cm$.

4. a) $I = \int x^3 sen(x^2)dx = \int x^2 sen(x^2)\, xdx = -\frac{x^2}{2}cos(x^2) + \int cos(x^2)xdx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^2, & dv = sen(x^2)xdx \\ du = 2xdx, & v = -\frac{1}{2}cos(x^2) \end{array}}$$

$= -\frac{x^2}{2}cos(x^2) + \frac{1}{2}sen(x^2) + k$

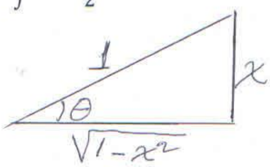
b) $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{sen^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta = \int sen^2\theta\, d\theta = \int \frac{1-cos(2\theta)}{2}\, d\theta$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = sen\theta \\ dx = \cos\theta\, d\theta \end{array}}$$

$= \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}sen(2\theta) + k$

$= \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}sen\,\theta\cos\theta + k$

$= \frac{1}{2}arcsen\, x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k$



c) $I = \int \frac{x^2+9}{(x+1)(x^2+4)}dx$

$\frac{x^2+9}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$\Leftrightarrow\ x^2+9 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1)$

Si $x = -1 \ \Longrightarrow\ 10 = 5A \ \Longrightarrow\ A = 2$

Coef. de x^2: $1 = A + B \ \Longrightarrow\ B = -1$

Coef. de x: $0 = B + C \ \Longrightarrow\ C = 1$

$I = \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{-x+1}{x^2+4}dx = 2\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + \int \frac{dx}{4+x^2}$

$= 2ln|x+1| - \frac{1}{2}ln|x^2+4| + \frac{1}{2}arctan\left(\frac{x}{2}\right) + k.$

Los profesores de la asignatura.