UNIVERSIDAD DE LIMA
PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: Cálculo I Fecha: 18 de julio de 2016
CICLO: 2016-1
TIEMPO: 90 minutos

EXAMEN FINAL

CÓDIGO	APELLIDOS Y NOMBRES	SECCIÓN

INDICACIONES:

- El procedimiento, el orden, la claridad de las respuestas y el uso apropiado de la notación matemática serán considerados como criterios de calificación.
- Escriba con lapicero de tinta azul o negra. La prueba desarrollada con lápiz no será calificada.
- La prueba consta de **4** preguntas, cuyo puntaje está indicado en cada una de ellas.
- Se permite el uso de una calculadora científica no programable.

Con la finalidad de evitar la anulación de la prueba tenga en cuenta que no se permite:

- Utilizar material de consulta (apuntes de clase, fotocopias o materiales similares).
- Usar teléfonos celulares, así como cualquier otro medio o dispositivo electrónico de comunicación.
- Conversar durante el desarrollo de la prueba.
- Desglosar o arrancar alguna hoja del cuadernillo de respuestas.

---

1. (3 ptos.) Halle la ecuación de la recta normal a la curva

$$C: cos\left(\frac{\pi x}{2y}\right) + arctan(y^2) + 1 = \frac{\pi}{4} + 2ln\left(\frac{xy}{2}\right)$$

en el punto $T(2;1)$.

2. Sea f la función dada por

$$f(x) = \frac{-5x}{x^2+9}$$

a) (1 pto.) Halle su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas, en caso de que existan.

b) (2 ptos.) Determine los intervalos de crecimiento, los intervalos de decrecimiento y los valores extremos relativos.

c) (1 pto.) Con la información obtenida, esboce la gráfica de f en el plano cartesiano.

3.- (4 ptos.) Un hombre dispone de 20 metros de valla para cercar un corral de forma rectangular. Si se sabe que uno de los lados del corral es una pared de su casa (que no requiere cercar), determine las dimensiones del corral para que su área sea máxima.

4. En cada caso, utilice un método de integración apropiado y halle cada una de las siguientes integrales indefinidas.

   a) (3 ptos.) $\int (3x-5)e^{2x+3}\ dx$

   b) (3 ptos.) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}dx$

   c) (3 ptos.) $\int \frac{4x^2-3x+9}{(x-3)(x^2+3)}dx$

TABLA DE INTEGRALES

1. $\int \sec u\ du = \ln|\sec u + \tan u| + k$.
2. $\int \csc u\ du = \ln|\csc u - \cot u| + k.$
3. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + k\ ,\ u \neq a.$
4. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\ \text{arctan}\left(\frac{u}{a}\right) + k.$
5. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + k\ ,\ |u| < a.$
6. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\ \text{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + k\ ,\ |u| > a.$
7. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + k.$
8. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\ du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2 \pm a^2}\ \pm a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right] + k.$

Los profesores de la asignatura.

CÁLCULO I UNA SOLUCIÓN DEL EXAMEN FINAL (2016-1)

1. Al derivar en forma implícita con respecto a x, se tiene

$$-sen\left(\frac{\pi x}{2y}\right).\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{y-xy'}{y^2}\right)+\frac{2yy'}{1+y^4}-\frac{2(y+xy')}{xy}=0$$

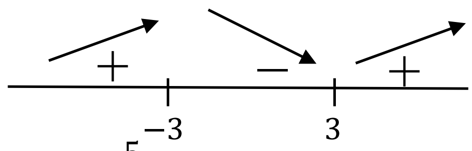
Al evaluar en el punto $T(2;1)$ resulta

$$0+y'-(1+2y')=0 \quad \Rightarrow \quad m_T=y']_{(2;1)}=-1$$

Luego, la ecuación de la recta normal a la curva $\mathcal{C}$ es $L_N: y-1=(x-2)$

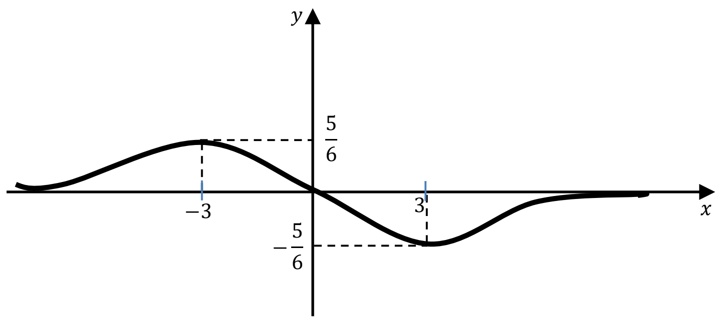
2. a) $Dom(f)=\mathbb{R}$, $A.V.: \nexists$, $A.H.: y=0$

$b)$ $f'(x)=\dfrac{5(x^2-9)}{(x^2+9)^2}$ Números críticos: $x=-3$ o $x=3$.

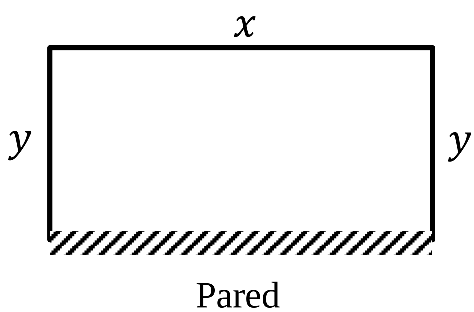
Signo de 

Valor máximo relativo: $f(-3)=\dfrac{5}{6}$, valor mínimo relativo: $f(3)=-\dfrac{5}{6}$

c)



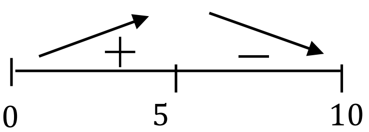
3. Dato: $x+2y=20 \quad \Rightarrow \quad x=20-2y$



$A=xy=y(20-2y)=20y-2y^2$

$A=20y-2y^2$, $0<y<20.$

$A'(y)=20-4y=0 \quad \Rightarrow \quad y=5$

Signo de 

Si $y=5$, entonces $x=10$.

Por consiguiente, las dimensiones del corral de área máxima son: largo: $10\ m$ y ancho: $5\ m$.

4. $a)\ \ I = \int (3x-5)e^{2x+3}dx$

$$\left\{\begin{matrix} u = 3x-5, & dv = e^{2x+3}dx \\ du = 3dx, & v = \frac{1}{2}\, e^{2x+3} \end{matrix}\right\}$$

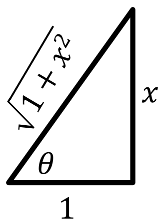
$$I = \int (3x-5)e^{2x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2}(3x-5)e^{2x+3} - \frac{3}{2}\int e^{2x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2}(3x-5)e^{2x+3} - \frac{3}{4}e^{2x+3} + K$$

$b)\ I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx$

$$\left\{\begin{matrix} x = tan\theta \\ dx = sec^2\theta\ d\theta \end{matrix}\right\}$$



$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx = \int \frac{\sqrt{tan^2\theta+1}}{tan^4\theta}\,sec^2\theta\ d\theta$$

$$= \int \frac{sec^3\theta d\theta}{tan^4\theta}\,d\theta = \int (sen\theta)^{-4}cos\theta\ d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\,csc^3\theta + K = -\frac{1}{3}\,\frac{(1+x^2)^{3/2}}{x^3} + K$$

$c)\ \ I = \int \frac{4x^2-3x+9}{(x-3)(x^2+3)}\,dx$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{4x^2-3x+9}{(x-3)(x^2+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+3} \iff 4x^2-3x+9 = A(x^2+3) + (Bx+C)(x-3) \\ \text{Si }\ x=3 \implies 36 = 12A \implies A = 3 \\ Coef.\ x^2{:}\ 4 = A + B \implies B = 1 \\ Coef.x{:}\ -3 = -3B + C \implies C = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$I = \int \left(\frac{3}{x-3} + \frac{x}{x^2+3}\right)dx = 3ln|x-3| + \frac{1}{2}\ ln(x^2+3) + K$$