UNIVERSIDAD DE LIMA
PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: Cálculo I
CICLO: 2017-2 TIEMPO: 90 minutos

EXAMEN FINAL

CÓDIGO	APELLIDOS Y NOMBRES	SECCIÓN

INDICACIONES:

- El procedimiento, el orden, la claridad de las respuestas y el uso apropiado de la notación matemática serán considerados como criterios de calificación.
- Escriba con lapicero de tinta azul o negra. La prueba desarrollada con lápiz no será calificada.
- La prueba consta de 4 preguntas, cuyo puntaje está indicado en cada una de ellas.
- Se permite el uso de una calculadora científica no programable ni con capacidad de graficar.

Con la finalidad de evitar la anulación de la prueba tenga en cuenta que no se permite:
- Utilizar material de consulta (apuntes de clase, fotocopias o materiales similares).
- Usar teléfono celular, *smartwatch*, así como cualquier otro medio o dispositivo electrónico de comunicación.
- Conversar durante el desarrollo de la prueba.
- Desglosar o arrancar alguna hoja del cuadernillo de respuestas.

---

1. (4 puntos) Dada la función f definida por:

   $$f(x) = x^2e^{-x}$$

   a) (1 punto) Halle el dominio de la función y determine las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función, en caso de que existan.

   b) (2 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus extremos relativos, en caso de que existan.

   c) (1 punto) Con la información de a) y b) haga un esbozo de la gráfica de la función.

2. (3 puntos) Una persona observa el lanzamiento de un cohete. Si la velocidad constante a la que se eleva el cohete es 5000 km/h y la persona está situada a 3 km del punto del lanzamiento y no se mueve, ¿cuál es la velocidad con la varía la distancia del cohete a la persona, en el instante en el que el cohete se encuentra a 4 km de altura?

3. (4 puntos) Un alambre de 56 cm de longitud se divide en dos partes, con una de ellas se forma un cuadrado de lado x cm y con la otra un rectángulo de dimensiones z y $3z$ (en cm). Halle el perímetro del rectángulo de manera que la suma de las áreas de las dos figuras formadas sea mínima.

4. (9 puntos) Esta pregunta tiene dos partes.

   a) Determine la función f, si se sabe que $f'(x) = (2x)\ arcsen(x^2)$ y $f(0) = 2$.

Continúa…

b) Calcule las integrales

$i)\ \displaystyle\int \frac{5x^2-4x+36}{(x^2-x-2)(x^2+4)}\,dx$ $\qquad\qquad ii)\ \displaystyle\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\,dx$

ALGUNAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

1. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+k;a>0$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+k;a>0$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+k;\ a>0$

4. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\,sen\frac{u}{a}+k;\ a>0$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = Ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+k$

6. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+k$

7. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{a^2-u^2}+a^2\,arcsen\frac{u}{a}\right]+k;a>0$

8. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{a^2+u^2}+a^2\,Ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)\right]+k$

9. $\displaystyle\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2-a^2}-a^2\,Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|\right]+k$

10. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}arc\sec\frac{|u|}{a}+k;a>0$

11.- $\displaystyle\int \tan u\,du = Ln\,|\sec u|+k$

12.- $\displaystyle\int \cot u\,du = Ln\,|sen\,u|+k$

13.- $\displaystyle\int \sec u\,du = Ln|\sec u+\tan u|+k$

14.- $\displaystyle\int \csc u\,du = Ln|\csc u-\cot u|+k$

Nota. En cada fórmula se asume que "u" es una función de x, esto es $u=f(x)$.

Una solución del examen final de Cálculo I (2017-2)

1. a) $Dom(f) = \mathbb{R},\ \ A.V. No\ hay,\ \ A.H.D.\ \ y = 0,$ ya que:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) \overset{L'h}{\cong} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^x}\right) \overset{L'h}{\cong} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^x}\right) = 0 \qquad \ldots(1p)$$

b) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x) \quad \ldots(0{,}5p)$

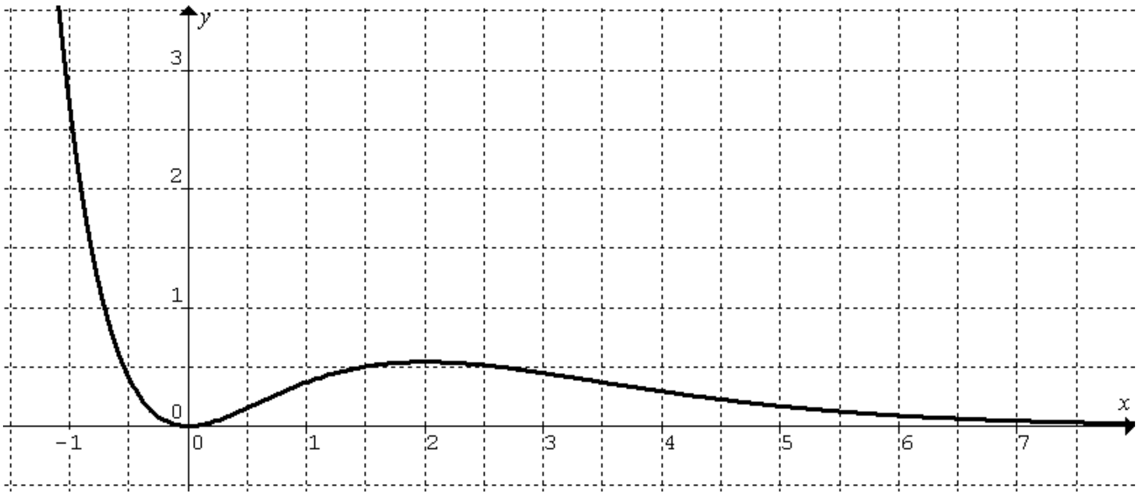
Números críticos: $x = 0;\ \ x = 2$

Signos de $f'(x)$: $\quad - \quad\quad + \quad\quad - \qquad (0{,}5p)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\quad 2$

Min rel $(0;0)$: Max rel $(2;4e^{-2})$ $\qquad (0{,}5p)\ c/u$

c) Gráfica de f: $(1p)$

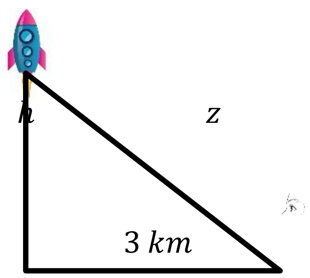


2. Sean: h: altura del cohete después del lanzamiento (en km).

z: distancia del espectador al cohete (en km).

$\dfrac{dh}{dt} = 5000\,km/h;\ \ \left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{h=4\,km} = ?$

(1p)



Por el T. de Pitágoras: $z^2 = 3^2 + h^2 \quad \ldots\ (0{,}5p)$

Derivando ambos miembros con respecto a t, se tiene

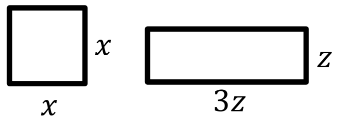
$$2z\frac{dz}{dt} = 2h\frac{dh}{dt} \quad \ldots\ (0{,}5p)$$

Al evaluar para $h = 4\ km$ y $z = 5\ km$, resulta

$$10\left.\frac{dz}{dt}\right|_{h=4\,km} = 8(5000) \implies \left.\frac{dz}{dt}\right|_{h=4\,km} = 4000 \ldots\ (0{,}5p)$$

Luego, la velocidad con la que cambia la distancia del espectador al cohete cuando la nave espacial se encuentra a 4 km de altura, es $4000\ km/h$. $\ldots(0{,}5p)$

3. Longitud del alambre= $L = 56\ cm$



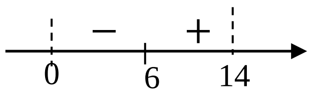
a) $L = 4x + 8z = 56 \implies z = \dfrac{14 - x}{2}$

b) $S = A_{cuadrado} + A_{rectángulo} = x^2 + 3z^2 = x^2 + 3\left(\dfrac{14 - x}{2}\right)^2 = \dfrac{7x^2 - 84x + 588}{4}$

Dominio: Como $x > 0 \ \wedge \ \dfrac{14 - x}{2} > 0$, entonces $\quad Dom(S) = \langle 0; 14\rangle$

$S' = \dfrac{1}{4}(14x - 84) = \dfrac{1}{2}(7x - 42) = 0 \implies \quad x = 6 \quad$ (Número crítico)

Signos de S':



Luego, S es mínima para $x = 6$ y $z = 4$.

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo de modo que la suma de las áreas de las figuras formadas sea mínima, es $32\ cm$.

4. $a)$ $f(x) = \displaystyle\int (2x)\ arcsen(x^2)\ dx = \int \underbrace{arcsen(x^2)}_{u} \left(\underbrace{2x\ dx}_{dv}\right) \qquad y \quad f(0) = 2$

$$\begin{cases} u = arcsen(x^2) & \implies \quad du = \dfrac{2x\ dx}{\sqrt{1 - x^4}} \\ \quad dv = 2x\ dx & \implies \quad \ v = x^2 \end{cases}$$

Luego,

$$f(x) = x^2 arcsen(x^2) - \int (x^2) \frac{2x\ dx}{\sqrt{1 - x^4}} =$$

$$= x^2 arcsen(x^2) + \frac{1}{2}\int \underbrace{(1 - x^4)^{-1/2}}_{z^{-1/2}} \underbrace{(-4x^3 dx)}_{dz}$$

$$= x^2 arcsen(x^2) + \sqrt{1 - x^4} + k \qquad \ldots \quad (0{,}5p)$$

$$f(0) = 0^2 arcsen(0^2) + \sqrt{1 - 0^4} + k = 2 \implies \quad k = 1 \qquad \ldots (0{,}5p)$$

Por lo tanto, $\boxed{f(x) = x^2 arcsen(x^2) + \sqrt{1 - x^4} + 1}$ $\quad \ldots \quad (0{,}5p)$

b) $i)$ $I = \displaystyle\int \frac{5x^2 - 4x + 36}{(x^2 - x - 2)(x^2 + 4)}\ dx = \int \frac{5x^2 - 4x + 36}{(x + 1)(x - 2)(x^2 + 4)}\ dx$

$$\frac{5x^2 - 4x + 36}{(x + 1)(x - 2)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

$$= \frac{A(x - 2)(x^2 + 4) + B(x + 1)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)(x^2 + 4)}$$

$x = -1$: $\quad 45 = -15A \implies \quad A = -3$

$x = 2$: $\quad 48 = 24B \implies \quad B = 2$

$x = 0$: $\quad 36 = -8A + 4B - 2D \quad \Longrightarrow \quad D = -2$

$x = 1$: $\quad 37 = -5A + 10B - 2C - 2D \quad \Longrightarrow \quad C = 1$

$$I = \int \left(\frac{-3}{x+1} + \frac{2}{x-2} + \frac{x-2}{x^2+4} \right) dx$$

$$= -3ln|x+1| + 2ln|x-2| + \frac{1}{2} ln|x^2+4| - arctan\left(\frac{x}{2}\right) + k$$

$ii)$ $I = \int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\ dx$

Si $x = 3sen(\theta) \quad \Longrightarrow \quad dx = 3\cos(\theta)\ d\theta$, se tiene

$$I = \int \frac{\left(3sen(\theta)\right)^2}{\left(\sqrt{9 - \left(3sen(\theta)\right)^2}\right)^3} [3\,cos(\theta)]\ d\theta = \int \frac{sen^2(\theta)}{cos^2(\theta)}\ dx = \int tan^2(\theta) dx$$

$$= \int (sec^2(\theta) - 1)\, dx = tan(\theta) - \theta + k = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} - arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + k$$