UNIVERSIDAD DE LIMA
PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: Cálculo I — Fecha: 26 de febrero del 2018
CICLO: 2018-0 — TIEMPO: 90 minutos

EXAMEN FINAL

CÓDIGO	APELLIDOS Y NOMBRES	SECCIÓN

INDICACIONES:

- El procedimiento, el orden, la claridad de las respuestas y el uso apropiado de la notación matemática serán considerados como criterios de calificación.
- Escriba con lapicero de tinta azul o negra. La prueba desarrollada con lápiz no será calificada.
- La prueba consta de 4 preguntas, cuyo puntaje está indicado en cada una de ellas.
- Se permite el uso de una calculadora científica no programable ni con capacidad de graficar.

Con la finalidad de evitar la anulación de la prueba tenga en cuenta que no se permite:
- Utilizar material de consulta (apuntes de clase, fotocopias o materiales similares).
- Usar teléfono celular, *smartwatch*, así como cualquier otro medio o dispositivo electrónico de comunicación.
- Conversar durante el desarrollo de la prueba.
- Desglosar o arrancar alguna hoja del cuadernillo de respuestas.

---

1. (4,5 puntos) Dada la función f definida por:

$$f(x) = \frac{x + \ln(x) + 1}{x}$$

a) (1,5 puntos) Halle el dominio de la función y determine las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función, en caso de que existan.

b) (2 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus extremos relativos, en caso de que existan.

c) (1 punto) Con la información de a) y b) haga un esbozo de la gráfica de la función.

2. (3 puntos) Una curva $\mathcal{C}$ tiene por ecuación:

$$\mathcal{C}: e^{xy-2} + arctan\left(\frac{2y}{x}\right) = \sqrt{xy-1} + \frac{\pi}{4}$$

Determine la ecuación de la recta normal a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $A(2;1)$.

3. (3,5 puntos) Se desea construir un tanque cerrado que tenga la forma de un paralelepípedo rectangular de base cuadrada. Este tanque va a almacenar agua y se requiere que su capacidad sea de 64 metros cúbicos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del tanque para que su área total sea mínima?

Continúa…

4. (9 puntos) Calcule las siguientes integrales:

$i)\ \int \frac{x^3+x^2+3}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx \qquad ii)\ \int \frac{(x^2-4)^{5/2}}{x^8}\,dx \qquad iii)\int (2x-2)\,arctan(x)\,dx$

ALGUNAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

1. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arc\tan \frac{u}{a} + k;a>0$

2. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + k;a>0$

3. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + k;\ a>0$

4. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\,sen\frac{u}{a} + k;\ a>0$

5. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = Ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + k$

6. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + k$

7. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{a^2-u^2} + a^2\,arcsen\frac{u}{a}\right] + k;a>0$

8. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{a^2+u^2} + a^2\,Ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)\right] + k$

9. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2-a^2} - a^2\,Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|\right] + k$

10. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc\sec\frac{|u|}{a} + k;a>0$

11.- $\int \tan u\,du = Ln\,|sec\ u| + k$

12.- $\int \cot u\,du = Ln\,|sen\ u| + k$

13.- $\int sec\ u\,du = Ln|\sec u + tan\,u| + k$

14.- $\int \csc u\,du = Ln|\csc u - \cot u| + k$

Nota. En cada fórmula se asume que "u" es una función de x, esto es $u = f(x)$.

Una solución del examen final de Cálculo I (2018-0)

1. a) $Dom(f) = \langle 0;\ +\infty\rangle$ ... $(0{,}5\ p)$

$A.H.D.\ \ y = 1,$ ya que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln(x)+1}{x}\right) \overset{L'h}{\cong} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1}\right) = 1 \qquad \ldots (0{,}5\ p)$$

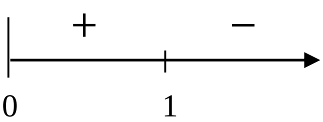
$A.V.\quad x = 0,$ ya que:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+\ln(x)+1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(x+\ln(x)+1).\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \qquad \ldots (0{,}5\ p)$$

b) $f'(x) = -\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$ ... $(0{,}5p)$

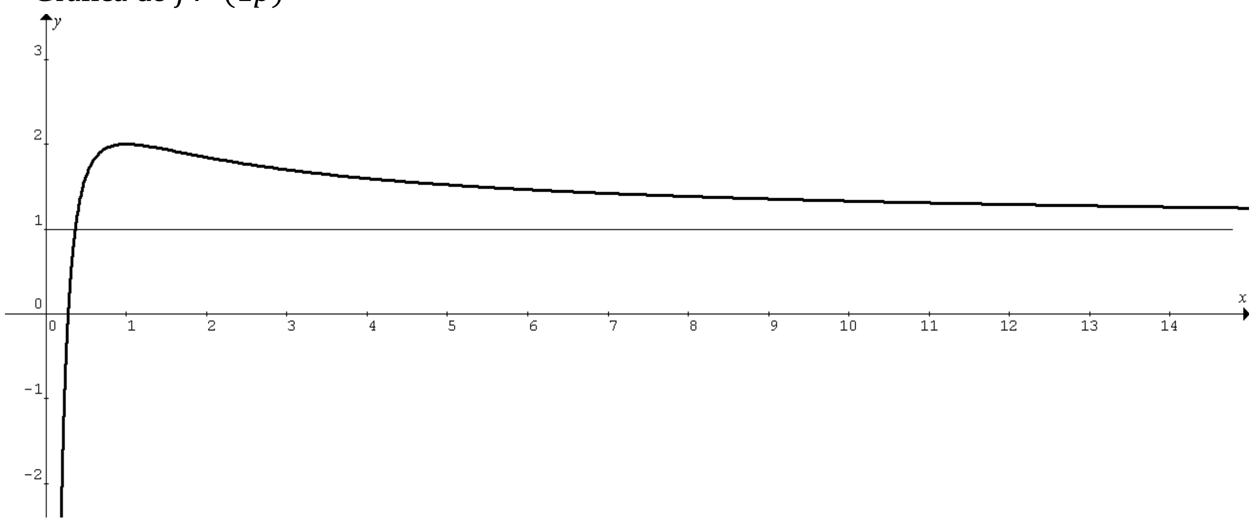
Números críticos: $x = 1$ ... $(0{,}5p)$

Signos de $f'(x)$: $(0{,}5p)$



Max rel $(1;2)$ $(0{,}5p)$

c) Gráfica de f: $(1p)$



2. $\mathcal{C}: e^{xy-2} + arctan\left(\frac{2y}{x}\right) = \sqrt{xy-1} + \frac{\pi}{4}$

derivando implícitamente ambos miembros:

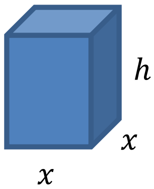
$$\underbrace{e^{xy-2}(1\cdot y + xy')}_{0{,}5\ p} + \underbrace{\frac{\frac{2xy'-2y}{x^2}}{1+\left(\frac{2y}{x}\right)^2}}_{0{,}5\ p} = \underbrace{\frac{1\cdot y + xy'}{2\sqrt{xy-1}}}_{0{,}5\ p}$$

Evaluando en $x = 2,\ y = 1$:

$$\underbrace{1 + 2y' + \frac{2y' - 1}{4} = \frac{1 + 2y'}{2}}_{0,5\,p} \quad \leftrightarrow \quad \underbrace{y' = \frac{-1}{6}}_{0,5\,p}, \quad m_N = 6$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta normal es: L_N: $y - 1 = 6(x - 2)$ ... $0,5\,p$

3.



$$\underbrace{V = x^2 h = 64}_{0,5\,p} \quad \leftrightarrow \quad h = \frac{64}{x^2} \; ; \quad \underbrace{A_T = 2x^2 + 4xh}_{0,5\,p} = 2x^2 + 4x\left(\frac{64}{x^2}\right) = 2x^2 + \frac{256}{x}$$

$$\underbrace{A_T = 2x^2 + \frac{256}{x}}_{0,5\,p}, \quad x > 0$$

$$\underbrace{A'_T = 4x - \frac{256}{x^2} = \frac{4x^3 - 256}{x^2}}_{0,5\,p}, \quad x > 0$$

Número crítico: $A'_T = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{4x^3 - 256}{x^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 4$ ... $0,5\,p$

Signos de A'_T: $\quad \underset{0}{|}\ - \ \underset{4}{|}\ + \longrightarrow$ ... $0,5\,p$

Luego, A_T es mínima para $x = 4$.

Por lo tanto, la base del tanque es un cuadrado de 4 $metros$ de lado, mientras que su altura también es de 4 $metros$. ... $0,5\,p$

4. $a)$ $I = \int \frac{x^3 + x^2 + 3}{x(x-1)(x^2+4)}\, dx$

$$\frac{x^3 + x^2 + 3}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} \quad \ldots \; 0,5\,p$$

$$= \frac{A(x-1)(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x(x-1)}{(x+1)(x-2)(x^2+4)}$$

$$\left.\begin{cases} x = 1: & 5 = 5B \quad \Rightarrow \quad B = 1 \\ x = 0: & 3 = -4A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{-3}{4} \\ Coef.\,de\,x^3: & 1 = A + B + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{4} \\ Coef.\,de\,x^2: & 1 = -A - C + D \quad \Rightarrow \quad D = 1 \end{cases}\right\} \quad \ldots \; 1p$$

$$I = \int \left(\frac{-3/4}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{\frac{3x}{4}+1}{x^2+4} \right) dx$$

$$= -\frac{3}{4} ln|x| + ln|x-1| + \frac{3}{4}\int \frac{x\,dx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$I = \underbrace{-\frac{3}{4} ln|x| + ln|x-1|}_{0{,}5\ p} + \underbrace{\frac{3}{8}\ ln|x^2+4|}_{0{,}5\ p} + \underbrace{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}_{0{,}5\ p} + k$$

b) $$I = \int \frac{(x^2-4)^{5/2}}{x^8}\ dx = \underbrace{\int \frac{\left(4\sec^2(\theta)-4\right)^{5/2}}{2^8\ sec^8(\theta)} \cdot 2\sec(\theta)\tan(\theta)\, d\theta}_{0{,}5\ p} = \int \frac{2^5\tan^5(\theta)}{2^7\ sec^7(\theta)} \cdot \tan(\theta)\, d\theta$$

Sea $x = 2\sec(\theta)$

$\underbrace{dx = 2\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta}_{0{,}5\ p}$

$$I = \underbrace{\frac{1}{4}\int (sen\ \theta)^6 \cos\theta\ \ d\theta}_{0{,}5\ p} = \underbrace{\frac{1}{4}\ \frac{sen^7(\theta)}{7} + k}_{0{,}5\ p}$$

$$I = \underbrace{\frac{1}{28}\ \frac{(x^2-4)^{7/2}}{x^7} + k}_{1\ p}$$

c) $$I = \int (2x-2)\ arctan(x)\ dx = \int \underbrace{arctan(x)}_{u} \left(\underbrace{(2x-2)\ dx}_{dv} \right)$$

$$1\ p \ldots \begin{cases} u = arctan(x) & \Longrightarrow \quad du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = (2x-2)dx & \Longrightarrow \quad v = x^2-2x \end{cases}$$

Luego,

$$I = (x^2-2x)\ arctan(x) - \int (x^2-2x)\frac{dx}{1+x^2} \qquad \ldots\ 0{,}5\ p$$

$$= (x^2-2x)\ arctan(x) - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\ dx + \int \frac{2x\ dx}{1+x^2} \qquad \ldots\ 0{,}5\ p$$

$$= (x^2-2x)\ arctan(x) - \underbrace{x + arctan(x)}_{0{,}5\ p} + \underbrace{ln|1+x^2|}_{0{,}5\ p} + k$$